Identyfikacja procesów technologicznych

Piotr Bania

Laboratorium 1

Zadanie 1 – błąd oszacowania średniej

Za pomocą karty z przetwornikiem A/D, 10000 razy zmierzono napięcie na rezystorze o wartości 120 Ω. Dane są dostępne pod adresem

http://home.agh.edu.pl/~pba/stud/Ident/Lab_01/data_01.mat.

Za pomocą testu Kołmogorowa- Smirnowa bądź testu Lillieforsa (funkcje Matlaba: *kstest, lillietest*) sprawdzić czy rozkład danych jest normalny. Narysować histogram (funkcja *hist*) danych, wyznaczyć średnią wartość prądu płynącego przez rezystor oraz oszacować błąd tej średniej. Podać przedział ufności dla oszacowania średniej wartości prądu na poziomie 1%. W oparciu o wyznaczoną średnią i jej odchylenie standardowe narysować rozkład Gaussa wraz z przedziałem ufności dla średniej.

Zadanie 2 – aproksymacja wielomianami

Pomiar poziomu cieczy wykonywany jest za pomocą czujnika ciśnieniowego, którego napięcie wyjściowe zależy od poziomu cieczy. Dane są dostępne adresem http://home.agh.edu.pl/~pba/stud/Ident/Lab_01/data_02.mat . Napięcie zmierzone na wyjściu czujnika w *i*-tym pomiarze oznaczamy przez u_i. Zakładamy że

$$y_i = \sum_{k=0}^{n} a_k u_i^k + e_i$$

gdzie y_i oznacza poziom cieczy oraz e_i jest błędem pomiaru poziomu. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów znaleźć współczynniki wielomianu aproksymującego charakterystykę czujnika dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ oraz zbadać jakość dopasowania za pomocą testu chi2 na poziomie ufności 1% (funkcja *chi2gof*). Wybrać najmniejsze *n* dla którego test chi2 pozwala przyjąć hipotezę, że reszty modelu pochodzą z rozkładu normalnego. Narysować otrzymaną charakterystykę czujnika oraz dane. Podać błędy oszacowania (odchylenia standardowe) poziomu i parametrów oraz narysować krzywe odchylające się od ch-ki czujnika o 3 odchylenia standardowe w górę i w dół.

Wskazówki. Aby znaleźć parametry należy rozwiązać układ równań

$$\phi^T \phi \hat{a} = \phi^T Y,$$

gdzie $\hat{a} = col(a_0, ..., a_n)$, $Y = col(y_1, ..., y_N)$, $\phi = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & \cdots & u_1^n \\ 1 & u_2 & u_2^2 & \cdots & u_2^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & u_N & u_N^2 & \cdots & u_N^n \end{bmatrix}$.

Nieobciążony estymator wariancji błędu pomiaru poziomu wynosi $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\hat{e}^T \hat{e}}{N-n-1}$, gdzie $\hat{e} = Y - \phi \hat{a}$. Macierz kowariancji parametrów $\mathrm{cov}\hat{a} = \hat{\sigma}^2 (\phi^T \phi)^{-1}$. Elementy diagonalne tej macierzy, są wariancjami parametrów. To samo wykonać za pomocą funkcji *polyfit*.

Zadanie 3

Oscylator z tłumieniem jest opisany równaniem różniczkowym

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\xi + \omega_0^2 x = w,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0, \tag{1}$$

gdzie w oznacza zakłócenia. Pomiary zmiennej *x* dokonywane są w dyskretnych chwilach czasu

$$y_k = x(kT_0) + v_k, \tag{2}$$

gdzie y_k oznacza wynik *k*-tego pomiaru oraz v_k jest zakłóceniem. Okres próbkowania wynosi T_0 Równania (1) i (2) sugerują, że układ z czasem dyskretnym odpowiadający równaniom (1) i (2) może być w przybliżeniu modelowany równaniem różnicowym

$$y_k = \theta_1 y_{k-1} + \theta_2 y_{k-2} + e_k, \tag{3}$$

gdzie e_k oznacza zakłócenie oraz θ_1, θ_2 są nieznanymi parametrami. Dane pomiarowe są dostępne pod adresem http://home.agh.edu.pl/~pba/stud/Ident/Lab_01/data_03.mat . Okres próbkowania T_0= 0.1 s. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów należy wyznaczyć parametry θ_1, θ_2, podać oszacowania błędów oraz wyznaczyć wariancję zakłócenia *e*. Przyjąć, że e_k jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie Gaussa. Porównać na jednym rysunku działanie modelu (3) z danymi pomiarowymi. Wskazówki: Model regresyjny (3) można zapisać w postaci

$$Y = \phi\theta + e,$$

gdzie

$$Y = col(y_3, ..., y_N),\ \phi = \begin{bmatrix} y_2 & y_1 \\ y_3 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ \\ y_{N-1} & y_{N-2} \end{bmatrix},\ e = col(e_3, e_4, ..., e_N).$$

Minimalizacja funkcji $V(\theta) = \frac{1}{2}(\phi\theta - Y)^T(\phi\theta - Y)$ daje oszacowanie parametrów

$$\hat{\theta} = (\phi^T\phi)^{-1}\phi^T Y,\ \text{oraz}\ \mathrm{cov}\hat{\theta} = \hat{\sigma}^2(\phi^T\phi)^{-1},\ \hat{\sigma}^2 = \frac{2V(\hat{\theta})}{N-2},\ \hat{e} = Y - \phi\hat{\theta}.$$