Identyfikacja procesów technologicznych
Piotr Bania
Laboratorium 3

Zadanie 1. Układ inercyjny pierwszego rzędu z wymuszeniem losowym w postaci białego szumu jest opisany stochastycznym równaniem Ito

$$dx = (-ax + bu)dt + \sqrt{g}dw, \quad u = \sin\omega_1 t \tag{1}$$

$$a = 2,\ b = 3,\ g = 0.01,\ \omega_1 = \pi \tag{2}$$

oraz *w* jest standardowym procesem Wienera. Warunek początkowy jest zmienną losową o rozkładzie $N(x_0, K_0)$, $x_0 = 10$, $K_0 = 4$. Średnia i wariancja procesu spełniają równania

$$\dot{\mu} = -a\mu + bu,\ \mu(0) = x_0,\ \dot{K} = -2Ka + g,\ K(0) = K_0. \tag{3}$$

Proces *x* jest procesem Gaussa-Markowa, a zatem jest całkowicie określony przez wariancję *K* oraz średnią μ. Napisać jawny wzór na rozkład prawdopodobieństwa procesu w chwili *t*. Narysować na jednym wykresie średnią procesu *x* oraz wyznaczyć linie określone równaniami

$$m(t) = \mu(t) \pm 3\sigma(t), \quad t \in [0, 6s] \tag{4}$$

gdzie $\sigma(t) = \sqrt{K(t)}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że $x(t) \in [\mu(t) - 3\sigma(t), \mu(t) + 3\sigma(t)]$? Jakie jest asymptotyczne (dla $t \to \infty$) odchylenie standardowe tego procesu?

Zadanie 2. Oscylator harmoniczny z wymuszeniem losowym jest opisany układem równań Ito

$$dx = (Ax + Bu)dt + Gdw, \tag{6}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{g} \end{bmatrix},\ u = 0, \tag{7}$$

gdzie $\omega_0 = 1,\ \xi = 0.1,\ b = 1,\ g = 1,$ (8)

oraz *w* jest standardowym procesem Wienera. Warunek początkowy jest zmienną losową o rozkładzie $N(x_0, K_0)$, przy czym $x_0 = [15, 0]^T$, $K_0 = 10^{-1}diag(1,1)$. Średnia i macierz kowariancji spełniają równania

$$\dot{\mu} = A\mu + Bu,\ \mu(0) = x_0, \tag{9}$$

$$\dot{K} = KA^T + AK + GG^T,\ K(0) = K_0. \tag{10}$$

Proces *x* jest procesem Gaussa-Markowa, a zatem jest całkowicie określony przez macierz kowariancji oraz średnią. Rozwiązać numerycznie równania (9) i (10) w przedziale czasu $[0, 6s]$, narysować na płaszczyźnie trajektorię fazową układu (9) oraz na tym samym wykresie pokazać poziomice rozkładów procesu *x* w chwilach *t* = 0,1,2,…,6s. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(|x_1(t) - \mu_1(t)| > 3\sqrt{K_{11}(t)})$ dla $t = 6$. Jaka jest asymptotyczna kowariancja i średnia procesu *x*. Przyjąć $\xi = 0$ i wyznaczyć numerycznie zależność wariancji położenia i prędkości oscylatora od czasu. Wyjaśnić zaobserwowane zachowanie. Podpowiedź: Macierz *K* jest symetryczna a zatem równanie (10) sprowadza się do układu trzech równań liniowych

$$\dot{K}_{11} = 2K_{12},\ K_{11}(0) = 10^{-3},$$

$$\dot{K}_{12} = K_{22} - 2\xi\omega_0 K_{12} - \omega_0^2 K_{11},\ K_{12}(0) = 0,$$

$$\dot{K}_{22} = -2\omega_0^2 K_{12} - 4\xi\omega_0 K_{22} + g,\ K_{22}(0) = 10^{-3}.$$

Asymptotyczną kowariancję otrzymuje się przyrównując prawą stronę do zera.