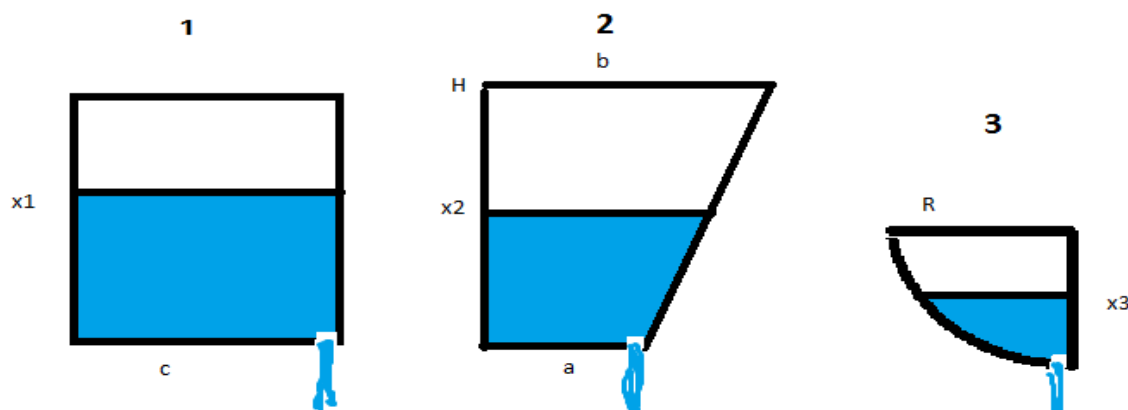


Identyfikacja procesów technologicznych
Piotr Bania
Laboratorium 5

Rozważamy swobodny wypływ wody ze zbiorników o przekrojach pokazanych na rys. 1.



Rys.1.

Zgodnie z prawem Torricellego równania opisujące wypływ wody ze zbiorników są następujące

$$\dot{x}_1 = -\frac{c_1 \sqrt{x_1}}{S_1}, \quad \dot{x}_2 = -\frac{c_2 \sqrt{x_2}}{S_2(x_2)}, \quad \dot{x}_3 = -\frac{c_3 \sqrt{x_3}}{S_3(x_3)}, \quad x_i(0) = x_{0,i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$S_1 = cw, \quad S_2(x_2) = w\left(\frac{b-a}{H}x_2 + a\right), \quad S_3(x_3) = w\sqrt{2Rx_3 - x_3^2},$$

$$a = 10\text{cm}, \quad b = 44.5\text{cm}, \quad c = 25, \quad w = 3.5\text{cm}, \quad H = 35\text{cm}, \quad R = 36.4\text{cm}.$$

Wykonano pomiary poziomu cieczy przy wypływie swobodnym dla każdego ze zbiorników. Wyniki pomiarów (czas w s, poziom w cm) znajdują się pod adresem http://home.agh.edu.pl/~pba/stud/Ident/Lab_05/data_01.mat Okres próbkowania wynosił $T_0 = 0.01\text{s}$.

Zadanie 1. Zakładamy, że zakłócenia na wyjściach (szumy czujników, falowanie cieczy itp.) mają rozkład normalny. Stosując metodę najmniejszych kwadratów należy znaleźć stałe c_1, c_2, c_3 oraz nieznane początkowe poziomy cieczy. Równania (1) rozwiązywać numerycznie lub analitycznie, tak aby otrzymać wartości rozwiązań dokładnie w chwilach próbkowania. Za pomocą testu chi kwadrat sprawdzić jakość dopasowania na poziomie istotności 0.001. Oszacować błędy parametrów oraz wariancję zakłóceń. Sprawdzić czy błędy mają rozkład normalny. Na jednym wykresie porównać model z danymi pomiarowymi.

Zadanie 2. Opierając się na wynikach zadania 1 określić czy model (1) jest dostatecznie dokładny. Jeżeli nie, to rozważyć model w postaci

$$\dot{x}_1 = -\frac{c_1 x_1^{\alpha_1}}{S_1}, \quad \dot{x}_2 = -\frac{c_2 x_2^{\alpha_2}}{S_2(x_2)}, \quad \dot{x}_3 = -\frac{c_3 x_3^{\alpha_3}}{S_3(x_3)}, \quad x_i(0) = x_{0,i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

Metodą najmniejszych kwadratów znaleźć nieznane wartości $c_1, c_2, c_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ oraz początkowe poziomy cieczy. Równania (2) rozwiązywać numerycznie lub analitycznie, tak aby otrzymać wartości rozwiązań dokładnie w chwilach próbkowania. Za pomocą testu chi kwadrat sprawdzić jakość dopasowania na poziomie istotności 0.001. Oszacować błędy parametrów oraz wariancję zakłóceń. Sprawdzić czy błędy mają rozkład normalny. Narysować na jednym wykresie dane pomiarowe oraz wyniki dopasowania modeli (1) i (2). Wyjaśnić, który z modeli jest lepiej dopasowany i dlaczego.

Wskazówki. Rozwiązanie równań (1) lub (2) z parametrami $c_i, \alpha_i, x_{0,i}$ oznaczamy symbolem $x_i(t, c_i, \alpha_i, x_{0,i})$, $i = 1, 2, 3$. Minimalizowana funkcja celu ma postać

$$Q(c_i, \alpha_i, x_{0,i}) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N (x_k(kT_0, c_i, \alpha_i, x_{0,i}) - y_i(kT_0))^2$$

gdzie $y_i(kT_0)$ oznacza k -ty pomiar wykonany w zbiorniku i -tym. Do rozwiązania zadania można użyć metod *lsqnonlin* lub *fmincon*. W obu przypadkach należy uwzględnić ograniczenia parametrów i przyjąć, że $0.1 \leq c_i \leq 200$, $0.2 \leq \alpha_i \leq 0.5$, $30 \leq x_{0,i} \leq 40$. Poniżej pokazano przykładowy kod rozwiązujący zadanie dla zbiornika środkowego przy użyciu metody *lsqnonlin*.

```
% tm jest wektorem chwil próbkowania
% ym jest wektorem zawierającym pomiary
LB=[0.1 0.2 30]';UB=[200 0.5 40]'; % ograniczenia
c=30;al=0.3;x0=35;
xopt=lsqnonlin('cel',[c al x0]',LB,UB,[],tm,ym);
```

```
function q=cel(p,tm,ym)
c=p(1);al=p(2);x0=p(3);
[t1,x1]=ode45(@(t,x) rhs(t,x,c,al),tm,x0);
e=x1(:,1)-ym;q=e;
```

```
function dx=rhs(t,x,c,al)
% przykład funkcji dla zbiornika środkowego
% a_1=w*(b-a)/H, b_1=w*a
dx=0;a1=3.45;b1=35;
x=max(x,0);
S=a_1*x+b_1;
dx=-c*x^al/S;
```

Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań należy dokonać wstępnej obróbki danych usuwając początkowe i końcowe fragmenty pomiarów odpowiadające chwilom, w których poziom cieczy nie zmieniał się bądź był równy zero. Hessian funkcji celu w punkcie optymalnym można otrzymać na drodze aproksymacji numerycznej bądź też z przybliżonego wzoru $H = \frac{1}{N} J^T J$ gdzie J jest jacobianem funkcji $x_i(kT_0, c_i, \alpha_i, x_{0,i})$ w punkcie optymalnym. Jakobian ten jest zwracany przez procedurę *lsqnonlin*.