Identyfikacja procesów technologicznych
Piotr Bania
Laboratorium 6

Identyfikacja układów oscylacyjnych

Zadanie 1. Swobodne drgania wahadła fizycznego zmierzono za pomocą enkodera o rozdzielczości $\Delta = \frac{2\pi}{2048} = 3.0678\cdot 10^{-3}$rad=0.1758°. Okres próbkowania wynosił $T_0 = 0.01$s. Dane pomiarowe znajdują się pod adresem http://home.agh.edu.pl/~pba/stud/Ident/Lab_06/data_01.mat przy czym czas jest mierzony w sekundach a kąt w stopniach. Ostatnie kilkaset pomiarów (ich ilość będziemy oznaczać przez n) nie różni się od siebie, a zatem wahadło przestało się wahać. Oszacujemy poziom zakłóceń na wejściu (wypadkowy moment działający na wahadło) i na wyjściu (szumy pomiarowe). Przyjmijmy, że wahadło jest opisane układem równań Ito

$$dx_1 = x_2 dt, \tag{2}$$

$$dx_2 = -\omega_0^2 \sin(x_1 - \alpha) - 2\xi\omega_0 x_2 + \sqrt{g}\,dw, \tag{3}$$

gdzie w jest standardowym procesem Wienera oraz $g > 0$. Asymptotyczna (gdy $t \to \infty$) wariancja zmiennej x_1 jest równa $\sigma_x^2 = \dfrac{g}{4\xi\omega_0^3}$ (zob. instrukcja do laboratorium 3). Układ pomiarowy jest opisany równaniem

$$y(kT_0) = Q(x_1(kT_0) + v_k) \tag{3}$$

gdzie v_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Gaussa i wariancji σ_v^2 oraz Q oznacza kwantyzator (enkoder). Zakładamy, że v_k nie zależą od procesu *w*. Zmienna losowa

$$z_k = x_1(kT_0) - Ex_1 + v_k$$

ma rozkład Gaussa o średniej zero i wariancji

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_v^2 = \frac{g}{4\xi\omega_0^3} + \sigma_v^2. \tag{4}$$

Dalej przyjmiemy, że czas korelacji procesu $x_1 - Ex_1$ jest dużo krótszy niż okres próbkowania. Wówczas z_k jest ciągiem niezależnych (bo nieskorelowanych) zmiennych gaussowskich. Prawdopodobieństwo, że z_k leży w przedziale $[-\Delta/2, \Delta/2]$ wynosi

$$P(z_k \in [-0.5\Delta, 0.5\Delta]) = 2\phi\left(\frac{\Delta}{2\sigma_z}\right) - 1,\ \phi(s) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi \tag{5}$$

Z obserwacji wiemy, że zmienna z_k przyjęła n razy wartość leżącą w przedziale $[-\Delta/2, \Delta/2]$. Stąd wniosek, że $P(z_k \in [-0.5\Delta, 0.5\Delta]) \geq 1 - \dfrac{1}{n}$. Korzystając z (5) otrzymujemy

$$\phi\left(\frac{\Delta}{2\sigma_z}\right) \geq 1 - \frac{1}{2n}. \tag{6}$$

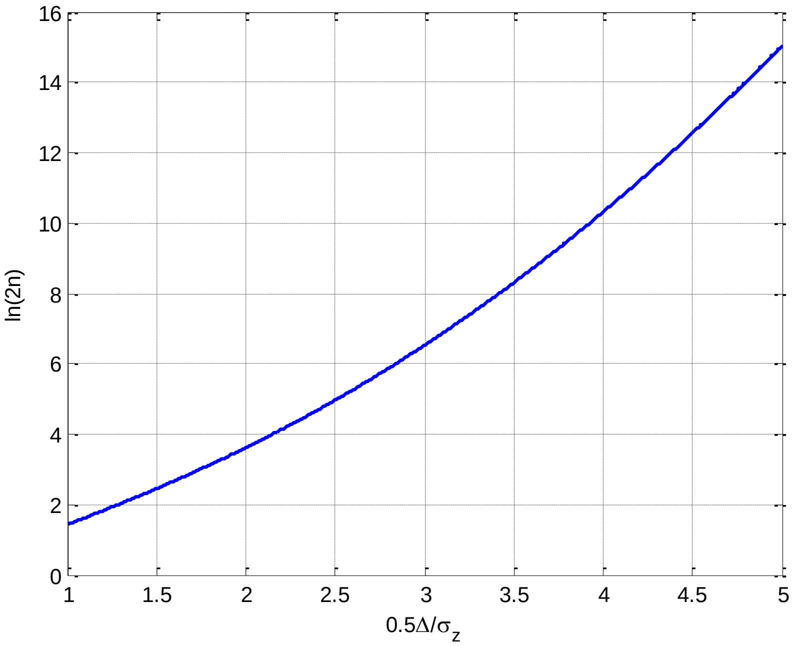
Zatem dla dużych *n* wielkość $\frac{\Delta}{\sigma_z}$ powinna przyjmować duże wartości. Dla $n > 100$ wyrażenie (6) jest niewygodne do praktycznych obliczeń. Stosując rozwinięcie asymptotyczne

$$\phi(s) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}s^2}}{s}, \; s = \tfrac{\Delta}{2\sigma_z}, \; s \to \infty$$

i biorąc logarytm obu stron nierówności (6) otrzymujemy dla dużych n

$$\tfrac{1}{2}s^2 + \ln s + \ln\sqrt{2\pi} \geq \ln 2n\,.$$

Nierówność tę można rozwiązać graficznie korzystając z podanego poniżej wykresu



Przykładowo dla $n = 10^4$ mamy $\sigma_z \leq \dfrac{\Delta}{7.8}$. Korzystając z (4) przyjmujemy oszacowania

$$g = 4\xi\omega_0^3\left(\frac{\Delta}{2s}\right)^2, \; \sigma_x = \sigma_v = \frac{\Delta}{2s}, \tag{7}$$

gdzie s jest rozwiązaniem równania

$$\tfrac{1}{2}s^2 + \ln s + \ln\sqrt{2\pi} = \ln 2n\,. \tag{8}$$

W ramach zadania 1 należy:

1. Narysować wykres wychylenia wahadła w funkcji czasu.
2. Na podstawie wykresu oszacować wartości parametrów ξ i ω_0, α.
3. Analizując końcowy odcinek danych wyznaczyć dokładną wartość α i jej błąd.
4. Korzystając z podanych powyżej wzorów oszacować wartości g oraz σ_v i σ_x.
5. Określić czy zakłócenia na wejściu można pominąć (czy są małe)?

Jeżeli odpowiedź na powyższe pytanie jest twierdząca, to wyznaczyć wartości parametrów ξ i ω_0 metodą najmniejszych kwadratów minimalizując numerycznie wskaźnik jakości

$$Q(a, b, x_{10}, x_{20},) = \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N}(x_1(kT_0) - y(kT_0))^2\,, \tag{9}$$

gdzie $y(kT_0)$ oznacza pomiar położenia w chwili kT_0 oraz x_1, x_2 są rozwiązaniem układu równań

$$\dot{x}_1 = x_2\,,\ x_1(0) = x_{10}\,, \tag{10}$$

$$\dot{x}_2 = -a\sin(x_1 - \alpha) - bx_2\,,\ x_2(0) = x_{20}\,, \tag{11}$$

$$a = \omega_0^2\,,\ b = 2\xi\omega_0\,.$$

Układ (9,10) rozwiązać numerycznie metodą ode45 tak, aby znaleźć wartości rozwiązania dokładnie w chwilach próbkowania. Do rozwiązania zadania użyć funkcji lsqnonlin z początkowymi wartościami parametrów ξ i ω_0 wyznaczonymi metodą graficzną. Oszacować wariancję reszt modelu i porównać ją z oszacowaniem wariancji wynikającym ze wzorów (7) i (8). Sprawdzić czy reszty modelu pochodzą z rozkładu normalnego. Obliczyć „chi kwadrat na stopień swobody”

$$\frac{\chi^2}{(N-4)} = \frac{2N\hat{Q}}{(N-4)\sigma_v^2}\,. \tag{12}$$

Jeżeli dopasowanie jest dobre, to wartość ta powinna leżeć w przedziale $1 \pm 3\sqrt{\frac{2}{N-4}}$.

Sprawdzić czy tak jest i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Oszacować błędy wyznaczenia parametrów analizując macierz hesjanu fukcji celu w punkcie optymalnym. Hesjan funkcji celu w punkcie optymalnym można otrzymać na drodze aproksymacji numerycznej bądź też z przybliżonego wzoru $H = \frac{1}{N}J^T J$ gdzie J jest jakobianem funkcji $x_1(kT_0)$ ze względu na poszukiwane parametry. Jakobian ten jest zwracany przez procedurę lsqnonlin. Porównać na jednym wykresie model oraz dane pomiarowe. Zastanowić się czy i kiedy można pominąć błędy kwantyzacji wnoszone przez enkoder?

Zadanie 2. Posługując się metodami opisanymi w zadaniu 1, dla danych dostępnych pod adresem http://home.agh.edu.pl/~pba/stud/Ident/Lab_06/data_02.mat wykonać analogiczne, jak w zadaniu 1 obliczenia i analizy.

Uwaga: W obu zadaniach, przy identyfikacji parametrów metodą najmniejszych kwadratów należy pominąć początkowe i końcowe fragmenty pomiarów. W chwilach tych wahadło było ustawiane w położeniu początkowym lub nie poruszało się.