Identyfikacja procesów technologicznych
Piotr Bania
Laboratorium 9

Dyskretno-ciągły rozszerzony filtr Kalmana

Wstęp

Zdecydowana większość pomiarów w systemach sterowania wykonywana jest w dyskretnych chwilach czasu, natomiast opis obiektu sterowanego jest zwykle dany w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych. Jeżeli pomiary wykonywane są relatywnie rzadko lub nierównomiernie, to należy uwzględnić ten fakt przy konstrukcji filtru (estymatora stanu). Bardzo często również, stan systemu nie jest bezpośrednio mierzony i należy go odtworzyć na podstawie pomiarów. Rozważamy układ równań Ito

$$dx = f(t,x)dt + g(t,x)dw,\ x(0) = x_0 \sim p_0(\theta), \tag{1}$$

gdzie w jest standardowym procesem Wienera oraz model obserwacji

$$y_i = Cx(t_i) + v_i,\ t_i \underset{i\to\infty}{\to} \infty, \qquad t_{i+1} > t_i,\ v_i \sim N(0,V),\ V = V^T > 0. \tag{2}$$

Model (1), (2) opisuje typową w układach sterowania sytuację, w której występują zakłócenia na wejściach obiektu oraz pomiary obarczone błędami losowymi, wykonywane są w dyskretnych, niekoniecznie równoodległych od siebie chwilach czasu. Niech

$$p(t,\theta \mid y_i,...,y_0),\ t \ge t_i, \tag{3}$$

oznacza rozkład warunkowy procesu x pod warunkiem obserwacji $y_0,...,y_i$. Zadanie filtracji nieliniowej polega na wyznaczeniu rozkładu (3) dla $t \ge t_i$. Znając rozkład (3) można wyznaczyć estymatę stanu, jako warunkową wartość oczekiwaną

$$\hat{x}(t) = \int_{R^n} p(t,\theta \mid y_i,...,y_0)d\theta^n . \tag{4}$$

Zadanie filtracji wymaga rozwiązania odpowiedniego równania Fokkera-Plancka (FP) stowarzyszonego z równaniem (1) oraz aktualizacji rozkładu po wykonaniu nowego pomiaru. Jak dotychczas, za wyjątkiem układów liniowych, nie podano ogólnych metod rozwiązywania równania FP stąd konieczność stosowania przybliżeń. Jednym z takich przybliżeń jest dyskretno-ciągły rozszerzony filtr Kalmana. Algorytm filtracji jest następujący.

W chwili początkowej oblicz

$$\hat{x}(t_0^-) = \int_{R^n} p_0(\theta)d\theta^n,\ S(t_0^-) = \int_{R^n} (\theta - \hat{x}(t_0^-))(\theta - \hat{x}(t_0^-))^T p_0(\theta)d\theta^n . \tag{5}$$

Po nowym pomiarze, w chwili t_i, aktualizuj estymatę stanu i macierz S

$$S_i = S(t_i^-) - S(t_i^-)C^T(V + CS(t_i^-)C^T)^{-1}CS(t_i^-), \text{ (aktualizacja macierzy } S) \tag{6}$$

$$\hat{x}(t_i) = \hat{x}(t_i^-) + S_iC^TV^{-1}(y_i - C\hat{x}(t_i^-)). \text{ (aktualizacja estymaty stanu)} \tag{7}$$

Pomiędzy pomiarami rozwiązuj równania

$$\dot{\hat{x}} = f(t,x),\ \hat{x}(t_i) = \hat{x}_i,\ t \in [t_i, t_{i+1}), \tag{8}$$

$$\dot{S} = AS + SA^T + gg^T,\ S(t_i) = S_i,\ t \in [t_i, t_{i+1}). \tag{9}$$

Symbol A oznacza macierz Jacobiego funkcji f obliczaną w punkcie $(t, \hat{x}(t))$, $A_{jk} = \dfrac{\partial f_j}{\partial \theta_k}$.

W układach liniowych algorytm ten jest dokładnym rozwiązaniem zadania filtracji dyskretno-ciągłej. Macierz S jest wówczas macierzą kowariancji błędu estymacji. W układach nieliniowych tak nie jest i algorytm powyższy jest jedynie przybliżeniem filtru optymalnego. Algorytm (5-9) jest odporny na nierównomierne próbkowanie i uwzględnia dyskretny w czasie charakter pomiarów. Estymata stanu jest znana również pomiędzy chwilami próbkowania i na ogół ma nieciągłości w chwilach wykonywania pomiarów. W układach o jednym wyjściu równanie (6) upraszcza się do postaci

$$S_i = S(t_i^-) - \frac{S(t_i^-)C^T CS(t_i^-)}{(V + CS(t_i^-)C^T)}.$$

W układach o dwóch lub trzech wyjściach odwrotność w (6) można wyznaczyć analitycznie. Dla większej liczby wyjść należy wykorzystać algorytmy odwracania macierzy dodatnio określonych np. rozkład SVD, Choleskiego lub inne.

Załóżmy teraz, że pomiary z różnych wyjść są wykonywane w różnych chwilach czasu i załóżmy dla uproszczenia, że w danej chwili t_i pojawia się pomiar tylko z jednego, *k*-tego wyjścia. Symbolem C_k oznaczamy *k*-ty wiersz macierzy *C*. Symbol $V_{k,k}$ oznacza zaś *k*-ty element na diagonali macierzy *V*. Wówczas reguły aktualizacji estymaty stanu oraz macierzy S będą następujące.

(aktualizacja macierzy *S*, pomiar tylko na *k*-tym wyjściu w chwili t_i)

$$S_i = S(t_i^-) - S(t_i^-)C_k^T (V_{k,k} + C_k S(t_i^-)C_k^T)^{-1} C_k S(t_i^-), \tag{6.1}$$

(aktualizacja estymaty stanu, pomiar tylko na *k*-tym wyjściu w chwili t_i)

$$\hat{x}(t_i) = \hat{x}(t_i^-) + S_i C_k^T V_{k,k}^{-1} (y_{k,i} - C_k \hat{x}(t_i^-)). \tag{7.1}$$

Jeżeli pomiary na wszystkich wyjściach wykonano w tej samej chwili czasu to należy zastosować wzory (6) i (7). Reguły aktualizacji w innych przypadkach można skonstruować w analogiczny sposób.

Zadanie 1. Zaimplementować dyskretno-ciągły rozszerzony filtr Kalmana dla układu serwomechanizmu z laboratorium 7 zad. 1. Rozważyć model stochastyczny w postaci

$$dx_1 = x_2 dt,\ x_1(0) = x_{10}, \tag{1}$$

$$dx_2 = K(u - H(x_2))dt + g_2 dw,\ x_2(0) = x_{20}, \tag{2}$$

$$y_i = x_1(t_i) + v_i.$$

Dane, sterowanie *u* [V], pomiary ym [rad] oraz chwile próbkowania tm [s] są dostępne pod adresem http://home.agh.edu.pl/~pba/stud/Ident/Lab_09/nu_sampl_servo.mat. Okres próbkowania dla sterowań wynosił $T_0 = 0.01$s. Pomiary były wykonywane nierównomiernie a chwile próbkowania zawarte w wektorze tm są wielokrotnościami okresu próbkowania T_0. W implementacji przyjąć, że pomiędzy chwilami próbkowania sterowanie jest stałe (aproksymacja schodkowa). Wyliczyć estymatę stanu w chwilach $t_j = jT_1$, $j = 0,1,2,\ldots$, gdzie $T_1 = 1$ms. Narysować na jednym wykresie estymatę położenia i pomiary położenia.

Narysować na jednym wykresie estymatę prędkości obrotowej oraz prędkość obrotową odtworzoną metodą ilorazu różnicowego ze wzoru

$$\bar{x}_2(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}. \tag{7}$$

Do całkowania równań filtru pomiędzy pomiarami, użyć (po odpowiednich modyfikacjach), stało-krokowej metody RK4 opisanej w instrukcji do laboratorium 7. Przyjąć, że wariancja zakłóceń wejściu układu jest równa $g_2^2 = 2 \cdot 10^{-2}$. Założyć, że wariancja zakłóceń na wyjściu $V = 10^{-5}$. Przeanalizować uzyskane wyniki. Skomentować ewentualne błędy estymacji. Na podstawie znajomości macierzy *S* wyznaczyć błędy estymacji we wszystkich chwilach czasu i narysować linie $\hat{x}_j(t) \pm e_j(t)$ gdzie $e_j(t)$ oznacza błąd estymacji *j*-tej składowej stanu.

Zadanie 2. Zaimplementować dyskretno-ciągły rozszerzony filtr Kalmana dla modelu helikoptera w płaszczyźnie pionowej zrealizowanego w ramach laboratorium 8. Rozważyć model stochastyczny w postaci

$$dx_1 = x_2 dt,\ x_1(0) = x_{10},$$

$$dx_2 = \left(-2\xi\omega_0(1 + c\,\mathrm{sgn}(x_3))x_2 - \omega_0^2 \sin(x_1 + \alpha) + k_p F(x_3)\right)dt + g_2 dw_1,\ x_2(0) = x_{20},$$

$$dx_3 = K(u - H(x_3))dt + g_3 dw_2,\ H(x_3) = p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z, z = 10^{-3} x_3,\ x_3(0) = x_{30},$$

$$y_{1,i} = x_1(t_i) + v_{1,i},\ y_{2,j} = x_3(t_j) + v_{2,j},$$

$$g_2 = 0.23,\ g_3 = 47.5,\ V = diag(V_1, V_2),\ V_1 = 10^{-5},\ V_2 = 15.3.$$

Dane (sterowanie *u*, pomiary ym1, ym2 oraz chwile próbkowania tm1 i tm2) są dostępne pod adresem http://home.agh.edu.pl/~pba/stud/Ident/Lab_09/nu_sampl_hel.mat. Odwrotność macierzy we wzorze (6) wyliczyć analitycznie (jest to macierz o wymiarze 2*x*2). Jeżeli w danej chwili wykonano oba pomiary to zastosować wzory (6) i (7). Jeżeli w danej chwili pojawił się tylko jeden pomiar, to zastosować wzory (6.1) i (7.1). Okres próbkowania dla sterowań wynosił $T_0 = 0.01$s. Pomiary były wykonywane nierównomiernie a chwile próbkowania zawarte w wektorach tm1 i tm2 są wielokrotnościami okresu próbkowania T_0. W implementacji przyjąć, że pomiędzy chwilami próbkowania sterowanie jest stałe (aproksymacja schodkowa). Wyliczyć estymatę stanu w chwilach $t_j = jT_1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, gdzie $T_1 = 1$ms. Narysować na jednym wykresie estymatę kąta wychylenia modelu i pomiary tego kąta. Narysować na jednym wykresie estymatę prędkości kątowej oraz prędkość kątową odtworzoną metodą ilorazu różnicowego ze wzoru

$$\bar{x}_2(t_i) = \frac{y_1(t_{i+1}) - y_1(t_i)}{t_{i+1} - t_i}. \tag{7}$$

Narysować na jednym wykresie pomiary prędkości obrotowej śmigła, estymatę tej prędkości uzyskaną z filtru oraz metodą ilorazu różnicowego według wzoru

$$\bar{x}_3(t_i) = \frac{y_2(t_{i+1}) - y_2(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

Przeanalizować uzyskane wyniki. Skomentować ewentualne błędy estymacji. Na podstawie znajomości macierzy S wyznaczyć błędy estymacji we wszystkich chwilach czasu i narysować linie $\hat{x}_j(t) \pm e_j(t)$ gdzie $e_j(t)$ oznacza błąd estymacji j-tej składowej stanu.