O ile nie zostało to zaznaczone, dużymi literami alfabetu łacińskiego oznaczono wielomiany zmiennej z-1 np. A(z-1) = a0+a1z-1+...+anAz-nA, nA oznacza stopień wielomianu A.

B1+ - wielomian którego zera leżą w okręgu jednostkowym,

B1– - wielomian którego zera leżą na okręgu jednostkowym lub poza nim,

R,S,T – wielomiany regulatora,

k – czasy opóźnień obiektu,

Ts – okres próbkowania.

**6.4. Regulacja z lokowaniem biegunów (Pole Placement)**

Regulator lokujący bieguny, stanowi w istocie metodę syntezy dynamicznego sprzężenia zwrotnego. Wyznaczenie parametrów regulatora odbywa się na drodze rozwiązania pewnych równań wielomianowych (ang. *diophantine equation*), które dają się sprowadzić do układu równań liniowych. W dalszym ciągu zamiast nazwy regulacja z lokowaniem biegunów będziemy używać skrótu *PP* (ang. *Pole Placement*). Większość wyprowadzeń i dowodów twierdzeń zawartych w tym punkcie można znaleźć w pracach [1],[2],[23]. Przedmiotem rozważań, będzie model transmitancyjny dyskretny w czasie, wyprowadzony w punkcie 5.4. Model ten jest opisany równaniem

 (6.46)

i jest równoważny równaniu różnicowemu



W celu uproszczenia notacji pomijamy czynnik *z-1* oznaczając wielomiany dużymi literami alfabetu łacińskiego np. *A(z-1)=A*, natomiast wyrażenie *nA* będzie oznaczało stopień wielomianu *A* . Do równania (6.46) dodamy jeszcze stałe zakłócenie, co zapewni własności całkujące regulatora (zob. np. [23]).

 (6.47)

Celem regulacji jest uzyskanie przy *i→∞* stabilnego układu zamkniętego o zadanych biegunach mianownika i transmitancji

, (6.48)

oraz kompensacja stałego zakłócenia na wyjściu. Czynnik *Km = Am(1)/B(1)* zapewnia jednostkowe wzmocnienie, *w(i)* oznacza wartość zadaną, natomiast *Am* jest znanym stabilnym wielomianem. Podobnie jak w przypadku ciągłym wpływ stałego zakłócenia może zostać usunięty po odpowiednio długim czasie. Wprowadzenie tego zakłócenia do modelu obiektu jest odpowiednikiem stosowania regulatora z całkowaniem. Synteza regulatora jest wykonywana w oparciu o równanie modelu i w ten sposób czynnik zakłócający zostanie uwzględniony w regulatorze. Takie postępowanie jest szczególnym przypadkiem ogólnej reguły zwanej zasadą wewnętrznego modelu ( ang. *internal model principle*), zgodnie z którą regulator powinien zawierać w swoim wnętrzu model zakłócenia deterministycznego, które ma kompensować. Wielomian *Ag* generujący zakłócenie może mieć inną postać, przykładowo wielomian  generuje przebieg , a jego uwzględnienie w modelu spowoduje, że układ regulacji będzie odporny na tego typu zakłócenie.

Odmiennie niż w przypadku regulatora *PID* sterowanie nie jest wyliczane na podstawie błędu regulacji lecz jest funkcją liniową poprzednich sterowań, wyjść i wartości zadanych. Algorytm regulacji ma postać

 (6.49)

i jest równoważny równaniu różnicowemu

 (6.50)

Metodę syntezy regulatora *PP* i jego podstawowe własności przedstawia następujące

*Twierdzenie 6.1*[23].

1. *Wielomiany algorytmu regulacji PP dane są wyrażeniami*

*R = AgF* (6.51)

*S = G* (6.52*)*

*T = A0Km* (6.53)

*gdzie F i G o stopniach*

*nF = nB* (6.54)

*nG = max(nA + nAg - 1,nA0 + nAm -1 - nB)* (6.55)

*są rozwiązaniem równania wielomianowego (diofantycznego)*

*AmA0 = AgAF+z-1BG* (6.56)

*w którym A0 jest dowolnym stabilnym wielomianem.*

1. *Równanie układu regulacji ma postać*

** (6.57*)*

1. *Równanie charakterystyczne jest dane wyrażeniem*

*AmA0 = 0* (6.58)

*4.Perturbacje H struktury obiektu nie naruszające stabilności określone są nierównością*

** (6.59)

Dowód tego twierdzenia i obszerną dyskusję można znaleźć w pracy [23], na której oparto dużą część tego rozdziału. W tym miejscu wykażemy punkty *1, 2 i 3* twierdzenia. Z równania obiektu (6.47) i regulatora (6.49) otrzymuje się

 (6.60)

Jeżeli wielomian *Ag* będzie czynnikiem *R* to dla *i→∞* zostanie usunięty wpływ stałego zakłócenia, stąd *R =* *AgF* i po podstawieniu do (6.60) mamy

 (6.61)

Porównując pierwszy czynnik po prawej stronie tego wyrażenia z celem regulacji (6.48) otrzymamy

 (6.62)

skąd wynikają (6.52), (6.53), (6.56), ( 6.57), (6.58) .

Ponieważ wielomiany *Am* i *A0* są stabilne to drugi czynnik w (6.57) zanika asymptotycznie do zera. Z (6.59) wynika, że wprowadzenie stabilnego wielomianu *A0* zwiększa odporność układu regulacji na zmiany struktury i parametrów obiektu. Perturbacje struktury są zdefiniowane następująco. Niech *K(z-1) = R(z-1) G(z-1)* będzie iloczynem transmitancji modelu i regulatora. Po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego otrzymamy układ regulacji opisany równaniem

. (6.63)

*H(z-1)* jest taką transmitancją, że perturbowany układ regulacji opisany równaniem

 (6.64)

jest lepszym przybliżeniem rzeczywistości niż układ modelowy (6.63). Zatem jeżeli chcemy uzyskać odporność w pewnym zakresie częstotliwości to możemy tak dobrać *A0*, aby prawa strona (6.59) przyjmowała duże wartości w tym zakresie częstotliwości. Warunki (6.54), (6.55) określają stopnie wielomianów *F* i *G* tak aby były one najmniejsze, można jednak używać wielomianów wyższych stopni . W rozważanym przypadku *nF = 2 , nG = 3*.

Równanie diofantyczne (6.56) pozwala wyznaczyć wielomiany *F* i *G* przez porównanie współczynników przy odpowiednich potęgach. Można pokazać [1],[2],[23], że równanie wielomianowe w postaci

*AX+BY=C* (6.65)

gdzie *X*, *Y* są poszukiwanymi wielomianami zmiennej *z-1* o stopniach *nX* i *nY* jest

równoważne z układem równań liniowych

. (6.66)

Jeżeli *nC + 1 = nX + nY + 2* oraz wielomiany *A* i *B* nie mają wspólnych pierwiastków to układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie. W przypadku naszego systemu mamy do wyznaczenia *nG+nF+2 = 3+2+2 = 7* współczynników zatem macierz układu (6.66) będzie miała wymiar 7×7. Przy syntezie regulatora przyjęto następujące wielomiany

 (6.67)

*p1=0.8 , p2=0.8.*

Bieguny układu zamkniętego *q1,q2,q3,q4* są liczbami zespolonymi leżącymi w kole jednostkowym i muszą być rozmieszczone symetrycznie względem osi rzeczywistej, bowiem tylko wtedy wielomian *Am* będzie stabilnym wielomianem o rzeczywistych współczynnikach. W trakcie eksperymentów stwierdzono, że regulator stabilizuje obiekt gdy parametry *q1 q2 q3 q4* należą do następującego zbioru

 (6.68)

przy czym okres próbkowania wynosił *2ms.*

Wyjaśnienie tego efektu jest następujące. Im bliżej punktu *(0,0)* leżą pierwiastki mianownika systemu zamkniętego tym układ jest szybszy, jednak pociąga to za sobą wzrost amplitudy sterowania. Duża amplituda sterowania powoduje wchodzenie układu w nasycenie i odstępstwa od modelu liniowego, na podstawie którego został wyprowadzony algorytm regulacji. Stąd dolne ograniczenie *|q|>0.65*. Górne ograniczenie wynika ze zbliżania się do granicy stabilności *|q| = 1*. Jeżeli ustawimy bieguny w lewej półpłaszczyźnie to wystąpi efekt „dzwonienia” regulatora (ang. *ringing effect,* zob. np.[2],[24]) i w konsekwencji również następuje utrata stabilności. Stąd ograniczenie *Re(q) > 0* .Oszacowanie (6.68) jest wynikiem eksperymentów i należy je traktować w przybliżeniu, pozwala ono jednak na uzyskanie stabilnie pracującego układu regulacji. Zauważmy jeszcze, że wynik ten pozostaje w zgodzie z nierównością (3.21), która nakłada ograniczenie na minimalny czas trwania stanu nieustalonego. Rysunki 6.12 i 6.13 przedstawiają wynik eksperymentu gdy *q1 = q2 = q3 = q4 = q = 0.8,* a rysunek 6.14 pokazuje co się dzieje dla *q = 0.65.* Najszerszą strefę stabilizacji, około *±5mm* od punktu równowagi, uzyskano dla rzeczywistych wartości własnych ulokowanych w okolicy punktu *(0.9,0)*. Rysunek 6.15 pokazuje wynik eksperymentu w tym przypadku.

**6.4. Regulacja z lokowaniem biegunów i zer (Pole Zero Placement) dla obiektów nieminimalnofazowych zakłócanych deterministycznie.**

Regulator lokujący bieguny i zera jest uogólnieniem regulatora omówionego powyżej.

Rozpatruje się obiekt regulacji w postaci



wielomian *B* obiektu podaje się faktoryzacji , przy czym *B+* ma wszystkie pierwiastki stabilne, a *B-* wszystkie niestabilne.

Celem regulacji jest:

1. Uzyskanie przy braku zakłóceń (*d = 0* ) następującej transmitancji nadążnej  
     
   
2. Wpływ stałego zakłócenia *d* powinien asymptotycznie zanikać.

Własności regulatora charakteryzuje następujące twierdzenie [23 str. 135]:

*Twierdzenie 6.2*

*Wielomiany algorytmu regulacji dane są wyrażeniami:*

**

*gdzie F, G o stopniach*

*nF = k-1+nB-,*

*nG = max(nA+nAg-1, nA0+nAm-k-nB-),*

*są rozwiązaniem równania diofantycznego*

**

*w którym A0 jest zadanym stabilnym wielomianem.*

*Równanie charakterystyczne układu regulacji ma postać  
  
 ,*

*Perturbacje struktury obiektu nie naruszające stabilności układu regulacji dane są wyrażeniem*  
*.*

Obszerną dyskusję, dowód oraz różne wersje powyższego twierdzenia można znaleźć w [23].

**W przypadku układu zbiorników i serwomechanizmu należy zaprojektować regulator lokujący bieguny i zera obiektu w sposób analogiczny jak w powyższym przykładzie. Doboru wielomianów *Ag, Am, Bm* dokonujemy na drodze symulacji wykonanej na modelu nieliniowym. Należy zwrócić uwagę na nasycenia urządzeń wykonawczych i dobrać parametry regulatora tak aby układ nie wchodził w nasycenie.**

Literatura :

[23]. Niederliński A., Mościński J., Ogonowski Z., *Regulacja adaptacyjna* . PWN , Warszawa 1995 .

[xx]. Grega W.   *Sterowanie cyfrowe w czasie rzeczywistym*   Kraków 2000