Laboratorium problemowe V rok.

Regulator czasooptymalny dla układu zbiorników.

(zadanie dla układu dwóch zbiorników)

Problem postawiony jest w sposób następujący:

1. dane są równania stanu systemu:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A} \cdot [q - C_1 \cdot \sqrt{H_1}]$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{\alpha(H_2)} C_1 \sqrt{H_1} - \frac{1}{\alpha(H_2)} C_2 \cdot \sqrt{H_2}$$

gdzie:

$$\alpha(\mathrm{H}_2) = f(H_2)$$

Oznaczenia:

A - powierzchnia górnego zbiornika,
C_1 i C_2 - współczynniki oporu wypływu odpowiednio z górnego i środkowego zbiornika,
H_1 i H_2 - poziomy wody odpowiednio w górnym i środkowym zbiorniku,
q - strumień zasilający górny zbiornik ,
$f(H_2)$ - powierzchnia swobodna środkowego zbiornika. Funkcja ta zależy od kształtu zbiornika środkowego i trzeba ją policzyć.

2. stan początkowy jest równy $H(0)=[H_{10},H_{20}]'$.
3. dany jest stan końcowy $H_k(T)$ wybrany arbitralnie ze zbioru stanów równowagi,

należy znaleźć sterowanie q*(t) takie aby wskaźnik jakości:

$$J(H(0), H_k(T), q) = \int_0^T dt = T$$

osiągnął minimum.

Sterowaniem jest strumień wpływający do górnego zbiornika, przy czym obowiązuje:

$$0 \leq q \leq q_{max}$$

Jest to klasyczny problem czasooptymalny prowadzący do znanych wyników dla układów liniowych, a mianowicie:

- sterowanie jest typu bang-bang (w naszym przypadku strumień pełnej wydajności pompy i zero),
- jest tylko jedno przełączenie sterowania w czasie napełniania,
- w momencie osiągnięcia żądanego poziomu w dolnym zbiorniku należy przełączyć sterowanie do wartości odpowiadającej stanowi ustalonemu oraz uruchomić algorytm stabilizacji pozwalający na utrzymanie tego poziomu.

Powyższe rozważania prowadzone były przy założeniu, że stan układu nie osiąga ograniczeń. W innych przypadkach konieczne byłoby zastąpienie zasady maksimum tzw. ograniczoną zasadą maksimum, uwzględniającą ograniczenia nałożone na stan.

Uwagi pomocnicze.

Rysunek 1 przedstawia trajektorie systemu na płaszczyźnie stanu otrzymane w wyniku symulacji. Trajektorie te obliczano tylko dla dwóch sterowań: $q = q_{max}$ i $q=0$. Trajektorie opróżniania narysowano dla różnych warunków początkowych H_{10} i dla $H_{20}=0$.

Układ zbiorników posiada zbiór punktów równowagi wyznaczony przez równanie:

$$C_1\sqrt{H_1} = C_2\sqrt{H_2}$$

Zbiór ten jest również naniesiony na rysunku. Dla przedstawionych trajektorii osiągalne punkty równowagi systemu zaznaczone są pustymi kółeczkami. Liniami pogrubionymi zaznaczone są trajektorie dla $H_o=[0\ 0]'$. Punkt przełączenia H_p i stan końcowy H_k oznaczone są wypełnionymi kółeczkami.
Trajektoria pomiędzy stanami Hp i H_k to część krzywej przełączeń. Oznaczmy ją przez T_p

W świetle powyższych rozważań sterowanie optymalne ma postać:

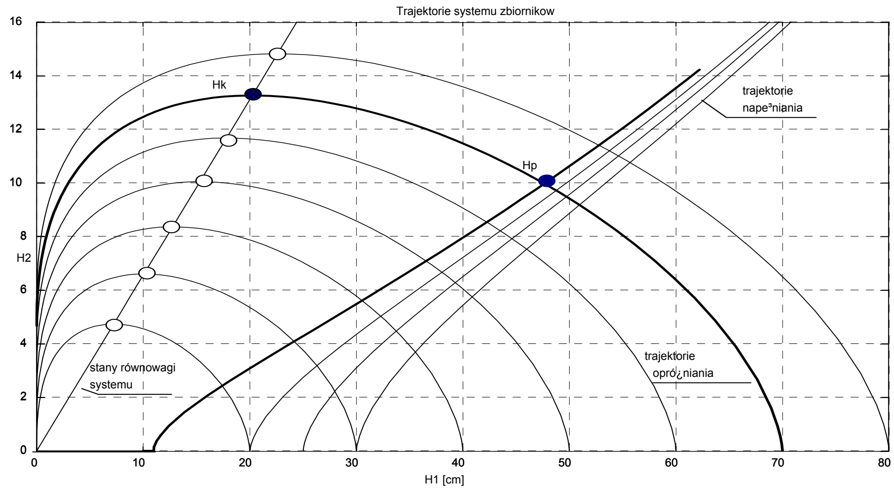
$q^* = q_{max}$ dla $H \langle T_p$ (napełniamy górny zbiornik)

$q^* = 0$ dla $H \in T_p$ (opróżniamy górny zbiornik)

$q^* = q_c$ dla $H = H_k$ (utrzymujemy stan ustalony)

gdzie q_c możemy wyliczyć z równania:

$$q_c = C_1 \cdot \sqrt{H_{k1}}$$



Rys.1. Trajektorie systemu dla sterowań $q=q_{max}$ i $q=0$.

W związku z powyższymi uwagami możemy ustalić jakie dane potrzebuje regulator dla poprawnej pracy:

- równanie trajektorii w celu wyznaczenia momentu przełączenia,
- stan końcowy H_k,
- wartość q_c.

Idea konstrukcji regulatora jest następująca:

- symulujemy trajektorię opróżniania dla dowolnego H_{10} i $H_{20}=0$,
- na tej trajektorii wyznaczamy stabilny stan końcowy H_k,
- aproksymujemy trajektorię opróżniania przechodzącą przez punkt H_k za pomocą założonej a priori funkcji stosując dowolną metodę optymalizacji. W wyniku otrzymamy wzór, który możemy bezpośrednio wpisać do równań regulatora i który będzie służył do wyliczenia momentu przełączenia.
- pierwsze przełączenie nastąpi w momencie, kiedy stan rzeczywisty (mierzony) znajdzie się na krzywej przełączeń,
- przełączenie sterowania na $q=q_c$ nastąpi w momencie gdy poziom $H_2(t) = H_{2k}$.